NA ODRŽANIM ČASOVIMA VEŽBI JE URAĐENO

1) TIPOVI JEDNAČINA KOJE SE NEPOSREDNO REŠAVAJU
   - JEDNAČINA KOJA RAZDVAJA PROMENLJIVE
   - JEDNAČINE OBLIKA $x' = f(ax + bt + c)$
   - JEDNAČINE OBLIKA $x' = f\left(\frac{x}{t}\right)$
   - JEDNAČINE OBLIKA $x' = f\left(\frac{ax + bt + c}{\alpha x + \beta t + \gamma}\right)$
   - LINEARNA DIFERENCIJALNA JEDNAČINA PRVOG REDA
   - BERNULIJEVA JEDNAČINA
   - RIKATIJEVA JEDNAČINA
   - JEDNAČINA TOTALNOG DIFERENCIJALA
   - JEDNAČINE KOJE DOPUŠTAJU INTEGRACIONI MNOŽITELJ
   - JEDNAČINE KOJE DOPUŠTAJU SNIŽAVANJE REDA

2) KOMPLETNI METRIČKI PROSTORI

3) SISTEMI DIFERENCIJALNIH JEDNAČINA
   - HOMOGENI SISTEMI DIFERENCIJALNIH JEDNAČINA SA KONSTANTNIM KOEFICIJENTIMA
   - NEHOMOGENI SISTEMI DIFERENCIJALNIH JEDNAČINA SA KONSTANTNIM KOEFICIJENTIMA
     - METOD VARIJACIJE KONSTANTI
     - METOD POGAĐANJA OBLIKA PARTIKULARNOG REŠENJA

4) DIFERENCIJALNE JEDNAČINE VIŠEG REDA

- VEZA JEDNAČINA VIŠEG REDA I SISTEMA DIFERENCIJALNIH JEDNAČINA
- HOMOGENE JEDNAČINE VIŠEG REDA
- NEHOMOGENE JEDNAČINE VIŠEG REDA
  - METOD VARIJACIJE KONSTANTI
  - METOD POGAĐANJA OBLIKA PARTIKULARNOG REŠENJA

U NASTAVKU SU ZADACI KOJI SU PREDVIĐENI ZA RAD NA VEŽBAMA DO KRAJA SEMESTRA

EKSPONENT MATRICE

$M_n(\mathbb{R})$ - MATRICE DIMENZIJE $n \times n$ NAD POLJEM REALNIH BROJEVA

$$\exp : M_n(\mathbb{R}) \to M_n(\mathbb{R})$$

$$\exp(A) = e^A := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!}$$

OSOBINE EKSPONENTA:

1) $e^{0} = E$ (0 - NULA MATRICA, E - JEDINIČNA MATRICA)
2) $AB = BA \Rightarrow e^{A+B} = e^A e^B$
3) $AB = BA \Rightarrow B e^A = e^A B$
4) $e^A = \lim_{n \to \infty} \left(E + \frac{A}{n}\right)^n$
5) $\frac{d}{dt} e^{tA} = e^{tA} A = A e^{tA}$ $\quad (A \in M_n(\mathbb{R}))$

6) $\det e^{tA} = e^{\operatorname{tr} A}$ $\quad (A \in M_n(\mathbb{R}))$

7) $e^{P^{-1}AP} = P^{-1} e^{A} P$ $\quad (A \in M_n(\mathbb{R}))$

1) ISPITATI DA LI POSTOJI $A \in M_2(\mathbb{R})$ TAKVA DA JE

a) $e^A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -4 \end{bmatrix}$ $\qquad$ b) $e^A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -4 \end{bmatrix}$

a) $\det(e^A) = e^{\operatorname{tr} A}$

$\det(e^A) = -4$

$\Rightarrow e^{\operatorname{tr} A} = -4 < 0$ $\lightning$

OVO JE U REALNIM BROJEVIMA I EKSPONENCIJALNA FUNKCIJA NE MOŽE UZETI NEGATIVNE VREDNOSTI.

$\Rightarrow$ NE POSTOJI TAKVA MATRICA

b) $\det(e^A) = 4$

$e^{\operatorname{tr} A} = 4 \Rightarrow \operatorname{tr} A = \log 4$ - OVO MOŽE

IZ OSOBINE 3) SLEDI

$A e^A = e^A A$

NEKA JE $A = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix}$$

$-\alpha = -\alpha$

$-\gamma = -4\gamma \Rightarrow \gamma = 0$

$$-4\beta = -\beta \quad \Rightarrow \quad \beta = 0$$

$$-4\delta = -4\delta$$

$$\Rightarrow \quad A = \begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \delta \end{bmatrix}$$

A JE DIJAGONALNA MATRICA PA JE

$$A^k = \begin{bmatrix} \alpha^k & 0 \\ 0 & \delta^k \end{bmatrix} \qquad (\text{PROVERITI INDUKCIJOM})$$

$$e^A = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\begin{bmatrix} \alpha^k & 0 \\ 0 & \delta^k \end{bmatrix}}{k!}$$

$$= \begin{bmatrix} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\alpha^k}{k!} & 0 \\ 0 & \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\delta^k}{k!} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^\alpha & 0 \\ 0 & e^\delta \end{bmatrix}$$

$$= e^\alpha = -1 \qquad e^\delta = -4 \quad \lightning$$

$\Rightarrow$ NE MOŽE POSTOJATI NI OVAKVA MATRICA

2) NEKA JE $\lambda \in \mathbb{C}$ SOPSTVENA VREDNOST MATRICE A. DOKAZATI DA JE e^λ SOPSTVENA VREDNOST OD e^A.

λ JE SOPSTVENA VREDNOST PA JE

$$Av = \lambda v \qquad v \neq 0 \quad (\text{SOPSTVENI VEKTOR})$$

PROVERIMO SA ISTIM SOPSTVENIM VEKTOROM

$$e^A v = \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!}\right) v = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k v}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k v}{k!}$$

$$= \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!}\right) v = e^\lambda v$$

$$A^k v = A^{k-1}(Av) = A^{k-1}\lambda v = \lambda A^{k-1} v =$$

$$= \lambda A^{k-2}(Av) = \lambda A^{k-2} \lambda v = \lambda^2 A^{k-2} v =$$

$$= \dots = \lambda^k v \quad \checkmark$$

POSMATRAMO SISTEM D. J.

$$\left.\begin{aligned} x_1' &= a_{11} x_1 + \dots + a_{1n} x_n \\ &\vdots \\ x_n' &= a_{n1} x_1 + \dots + a_{nn} x_n \end{aligned}\right\}$$

OVO ZAPISUJEMO KAO

$$X' = A X \qquad A \in M_n(\mathbb{R})$$

OPŠTE REŠENJE SISTEMA JE TADA

$$X(t) = e^{tA} \cdot C \qquad C \in \mathbb{R}^n \qquad C = \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}$$

1. REŠITI SISTEM $X' = AX$ ODREĐIVANJEM e^A U OBLIKU REDA AKO JE

a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ b) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ v) $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ g) $A = \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix}$

a)

$$e^{tA} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k A^k}{k!}$$

$$A^k = ?$$

$$A^2 = A \cdot A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A^3 = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

INTUITIVNO $A^k = \begin{bmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

OVO JE <u>NEOPHODNO</u> DOKAZATI INDUKCIJOM

(DOMAĆI)

$$e^{tA} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k \begin{bmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}{k!} = \begin{bmatrix} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} & \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} k \\ 0 & \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} e^t & t e^t \\ 0 & \underline{e^t} \end{bmatrix}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} k = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{t^k}{(k-1)!} = t \sum_{k=1}^{\infty} \frac{t^{k-1}}{(k-1)!} = t \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} = \underline{t e^t}$$

OPŠTE REŠENJE JE:

$$X(t) = \begin{bmatrix} e^t & t e^t \\ 0 & e^t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 e^t + c_2 t e^t \\ c_2 e^t \end{bmatrix}$$

$$x_1(t) = c_1 e^t + c_2 t e^t$$
$$x_2(t) = c_2 e^t \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

b) DOMAĆI

v) $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$

$$A^2 = A \cdot A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = -E$$

$$A^3 = A \cdot A^2 = A(-E) = -A$$

$$A^4 = A^2 \cdot A^2 = (-E)(-E) = E$$

$k = 4l + r$

$$A^k = \begin{cases} E & , r = 0 \\ A & , r = 1 \\ -E & , r = 2 \\ -A & , r = 3 \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

NAĐIMO VIŠE ZA $k = 2l + 1$ I $k = 2l + 1$

$$e^{tA} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k A^k}{k!} = \underbrace{\sum_{l=0}^{\infty} \frac{t^{2l+1}}{(2l+1)!}(-1)^l}_{\sin t} A + \underbrace{\sum_{l=0}^{\infty} \frac{t^{2l}}{(2l)!}(-1)^l}_{\cos t} E$$

MACLORENOVI ROZVOJI

$$e^{tA} = \sin t \cdot A + \cos t \cdot E$$

$$= \sin t \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} + \cos t \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$e^{tA} = \begin{bmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{bmatrix}$$

$$X(t) = e^{tA} \cdot c = \begin{bmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 \cos t + c_2 \sin t \\ -c_1 \sin t + c_2 \cos t \end{bmatrix}$$

$$x_1(t) = c_1 \cos t + c_2 \sin t$$
$$x_2(t) = -c_1 \sin t + c_2 \cos t$$

$c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

g) $A = \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix}$ $\quad a, b \in \mathbb{R}$

$$A = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & b \\ -b & 0 \end{bmatrix} = aE + bB$$

$B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ MATRICA IZ v)

$$e^{tA} = e^{taE + tbB} = e^{taE} e^{tbB}$$

$$taE \cdot tbB = \begin{bmatrix} ta & 0 \\ 0 & ta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & tb \\ -tb & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & t^2ab \\ -t^2ab & 0 \end{bmatrix}$$

$$\parallel$$

$$tbB \cdot taE = \begin{bmatrix} 0 & tb \\ -tb & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ta & 0 \\ 0 & ta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & t^2ab \\ -t^2ab & 0 \end{bmatrix}$$

$$e^{tA} = e^{taE} e^{tbB} = e^{at} \begin{bmatrix} \cos bt & \sin bt \\ -\sin bt & \cos bt \end{bmatrix}$$

DOMAĆI OBRAZLOŽITI

PIKAROVA I PEANOVA TEOREMA

$I \subseteq \mathbb{R}$ I - OTVOREN INTERVAL

$F : \underset{\mathbb{R}^k}{\underset{\cap}{U}} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^k$ - VEKTORSKO POLJE

F JE LOKALNO UNIFORMNO PO t, LIPŠICOVO PO x AKO SVAKA TAČKA IZ U IMA OKOLINU B TDJ.

$$\|F(x,t) - F(y,t)\| \leq L \|x-y\| \qquad x,y \in B \quad t \in I$$

PIKAROVA TEOREMA:

$U \subseteq \mathbb{R}^k$ U - OTVOREN

$F : U \times I \longrightarrow \mathbb{R}^k$

F - NEPREKIDNO, UNIFORMNO PO $t \in I$, LIPŠICOVO PO x

ZA SVAKO $x_0 \in U$: $t_0 \in I$ $\exists\, \delta > 0$

POSTOJI JEDINSTVENO REŠENJE

$x : [t_0 - \delta, t_0 + \delta] \longrightarrow U$

KOŠIJEVOG PROBLEMA

$$x'(t) = F(x,t) \quad , \quad x(t_0) = x_0$$

PEANOVA TEOREMA:

$U \subseteq \mathbb{R}^k$ U - OTVOREN

$F : U \times [t_0 - a, t_0 + a] \longrightarrow \mathbb{R}^k$

F - NEPREKIDNO

TADA ZA $\forall x_0 \in U$ $\exists\, \delta > 0$

I POSTOJI (NE MORA BITI JEDINSTVENO)

REŠENJE PROBLEMA:

$$x'(t) = F(x,t) \qquad x(t_0) = x_0 \qquad \text{NA } [t_0 - \delta, t_0 + \delta]$$

① ISPITATI EGZISTENCIJU I JEDINSTVENOST REŠENJA KOŠIJEVOG PROBLEMA

$$x'(t) = F(x,t) \qquad x(0) = 0$$

a) $F(x,t) = t\,x^3$

F JE NEPREKIDNO (POLINOM) PA PO PEANU POSTOJI REŠENJE PROBLEMA

POKUŠAVAMO PIKAROVOM TEOREMOM DA DOKAŽEMO JEDINSTVENOST REŠENJA, TJ. DA JE

$$|F(x,t) - F(y,t)| \leq L\,|x-y|$$

ZA NEKO $L \in \mathbb{R}$

POŠTO NAM TREBA LOKALNA JEDINSTVENOST MOŽEMO IZABRATI PROIZVOLJNE MALE OKOLINE, NA PRIMER:

$$x,y \in [-1,1] \qquad t \in (-1,1)$$

$$\boxed{x(\underset{t_0}{0}) = \underset{x_0}{0}}$$

$$|L(x,t) - L(y,t)| = |t\,x^3 - t\,y^3| =$$
$$= |t|\,|x^3 - y^3| = |t|\,|(x-y)(x^2+xy+y^2)|$$
$$= |t|\,|x-y|\,|x^2+xy+y^2|$$
$$\leq |t|\,|x-y|\,(x^2 + |xy| + y^2)$$
$$\leq 3\,|x-y|$$

DOBILI SMO $L = 3$

ISPUNJENI SU USLOVI PIKAROVE TEOREME, PA JE REŠENJE JEDINSTVENO.

b) $x' = \sqrt{|x|}\, t^2$

I Ovde je sve neprekidno, pa rešenje sigurno postoji po Peanovoj teoremi.

Pretpostavimo da je $t \in (-1, 1)$

Izaberimo $y = 0$

$$|F(x,t) - F(0,t)| = \sqrt{|x|}\, t^2 - 0 \leq \sqrt{|x|} \overset{?}{\leq} L\,|x-0| = L\,|x|$$

$$\sqrt{|x|} \leq L\,|x|$$

$$\frac{1}{\sqrt{|x|}} \leq L \quad / \lim_{x \to 0}$$ (okolinu 0 posmatramo)

$$\infty \leq L \quad \lightning$$

Nisu ispunjeni uslovi Pikarove teoreme, ali i dalje ne znamo da li je rešenje jedinstveno.

Rešavamo jednačinu

$$x' = \sqrt{|x|}\, t^2$$

$x \equiv 0$ sigurno jeste jedno rešenje

$x > 0$ $\quad x' = \sqrt{x}\, t^2$

$$\frac{dx}{\sqrt{x}} = t^2\, dt$$

$$2\sqrt{x} = \frac{t^3}{3} + C$$

$$\sqrt{x} = \frac{t^3}{6} + \frac{C}{2}$$

$$x = \left(\frac{t^3}{6} + \frac{C}{2}\right)^2$$

$x(0) = 0 \Rightarrow C = 0$

$$x = \frac{t^6}{36}$$

A analogno za $x<0$ dobijamo

$$x = -\frac{t^6}{36}$$

Zaključujemo da postoje bar 4 rešenja.

$$x_1(t) = 0 \qquad x_2(t) = \begin{cases} \frac{t^6}{36}, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$$

$$x_3(t) = \begin{cases} 0, & t \geq 0 \\ -\frac{t^6}{36}, & t < 0 \end{cases} \qquad x_4(t) = \begin{cases} \frac{t^6}{36}, & t \geq 0 \\ -\frac{t^6}{36}, & t < 0 \end{cases}$$

Primetimo da su dobijene funkcije diferencijabilne.

Zaključak je da rešenje nije jedinstveno.

v)
$$x'(t) = \frac{\log x}{1 - \sin x} + t$$

Definisanost:

- za $\log$ mora biti $x > 0$
- da ne bismo imali deljenje nulom

$\sin x \neq 1 \Rightarrow x \leq 0$

$\Rightarrow$ nema rešenja (nig de nije dobro definisano)

2

$$x' = x(1-x)$$
$$x(0) = \alpha$$

a) $\alpha \in (0,1)$ Bez rešavanja jednačine dokazati

$0 < x(t) < 1 \quad \forall t$

b) Odrediti $\lim\limits_{t \to \infty} x(t)$ za $\alpha \in \mathbb{R}$

a) $F(x, t) = x(1-x)$

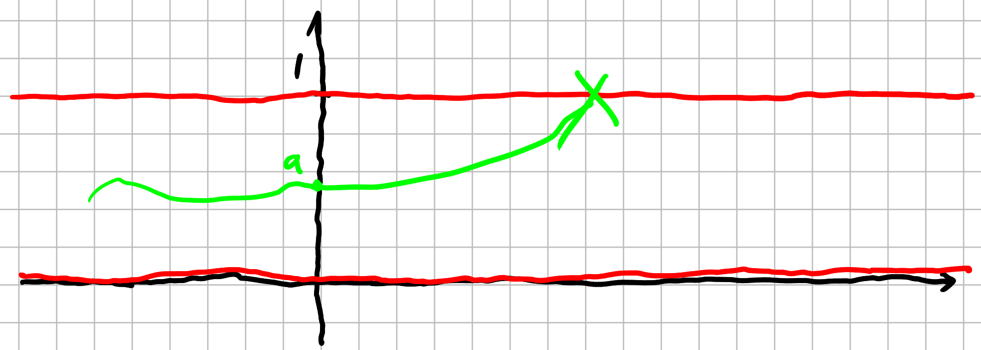
F - ne zavisi od t

F je klase C^1 pa su ispunjeni uslovi Pikarove teoreme i u okolini svake tačke rešenje je jedinstveno (pa se nijedna dva rešenja ne seku)

Primetimo da su rešenja

$x \equiv 0$; $x \equiv 1$

Sledi da nijedno rešenje koje prolazi kroz tačku $(0, a)$ za $0<a<1$ ne može preseći prave $x=0$ i $x=1$ te sledi zaključak.



b) Razdvojićemo na slučajeve u zavisnosti od $\alpha \in \mathbb{R}$

1° $0 < \alpha < 1$

Dokazali smo da je $\forall t$ $x \in (0,1)$

$$x' = \underset{0}{\underset{\vee}{x}}\,\underbrace{(1-x)}_{\vee\, 0} > 0$$

$x' > 0 \Rightarrow x \nearrow$

Rastuća i ograničena funkcija ima horizontalnu asimptotu, tj. postoji $\lim\limits_{t \to \infty} x(t)$

i važi da $x' \longrightarrow 0$

$$x' = x(1-x) \quad \Rightarrow \quad x(1-x) \to 0$$
$$x' \to 0$$

PA ILI $x \to 0$ ILI $x \to 1$

KAKO JE x RASTUĆA MORA BITI

$$\lim_{t \to \infty} x(t) = 1$$

2° $\quad \alpha > 1$

KAKO SE REŠENJA NE SEKU ANALOGNO ZAKLJUČUJEMO DA JE

$$\forall t \quad x(t) > 1$$

$$x' = \underset{>0}{x}\,\underbrace{(1-x)}_{<0} < 0$$

$$x' < 0 \quad \Rightarrow \quad x \downarrow$$

x JE OPADAJUĆA I OGRANIČENA ODOZDO PA IMA HORIZONTALNU ASIMPTOTU I $x' \to 0$ PA JE

$$\lim_{t \to \infty} x(t) = 1$$

3° $\quad \alpha < 0$

SLIČNO SLEDI $\forall t \quad x(t) < 0$

$$x' = \underset{<0}{x}\,\underbrace{(1-x)}_{>0} < 0$$

$$x' < 0 \quad \Rightarrow \quad x \downarrow$$

AKO BI x IMALA HORIZONTALNU ASIMPTOTU VAŽILO BI

$$x' \to 0 \quad \Rightarrow \quad x \to 0 \text{ ILI } x \to 1 \quad ; \quad x < 0 \quad x \downarrow$$

$$\lightning$$

ZAKLJUČUJEMO DA NEMA ASIMPTOTU

i $\lim_{t \to \infty} x(t) = -\infty$

4° $\alpha = 1$ $x \equiv 1$ $\lim_{t \to \infty} x(t) = 1$

5° $\alpha = 0$ $x \equiv 0$ $\lim_{t \to \infty} x(t) = 0$

ZAKLJUČAK!

$$\lim_{t \to \infty} x(t) = \begin{cases} 1, & \alpha > 0 \\ 0, & \alpha = 0 \\ -\infty, & \alpha < 0 \end{cases}$$

(3) FORMIRATI NIZ ITERACIJA IZ PIKAROVE TEOREME ZA PROBLEM

$$x' = \frac{x}{t}$$

$$x(t_0) = x_0 \qquad t_0 > 0$$

$$F(x, t) = \frac{x}{t}$$

$$x_0(t) = x_0$$

$$x_{n+1}(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} F(x_n(s), s)\, ds$$

KAD $n \to \infty$ DOBIJAMO REŠENJE

$$x_0(t) = x_0$$

$$x_1(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} \frac{x_0}{s}\, ds$$

$$= x_0 + x_0 \log s \Big|_{t_0}^{t} = x_0 + x_0(\log t - \log t_0)$$

$$= x_0 + x_0 \log \frac{t}{t_0}$$

$$x_2(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} \frac{x_0 + x_0 \lg \frac{s}{t_0}}{s}\, ds$$

$$= x_0 + \underbrace{\int_{t_0}^{t} \frac{x_0}{s}\, ds}_{x_0 \lg \frac{t}{t_0}} + x_0 \int_{t_0}^{t} \frac{\lg \frac{s}{t_0}}{s}\, ds$$

$$= x_0 + x_0 \lg \frac{t}{t_0} + \int_{t_0}^{t} \frac{\log \frac{s}{t_0}}{s}\, ds$$

SMENA $\quad u = \log \frac{s}{t_0}$

$$du = \frac{\cancel{t_0}}{s} \frac{1}{\cancel{t_0}} ds$$

$$= x_0 + x_0 \lg \frac{t}{t_0} + \int_0^{\lg \frac{t}{t_0}} u\, du$$

$$= x_0 + x_0 \lg \frac{t}{t_0} + \frac{1}{2} u^2 \Big|_0^{\lg \frac{t}{t_0}}$$

$$= x_0 + x_0 \lg \frac{t}{t_0} + \frac{1}{2} x_0 \left(\lg \frac{t}{t_0}\right)^2$$

<u>Domaći:</u>

DOKAZATI INDUKCIJOM DA JE

$$x_n(t) = x_0 + x_0 \lg \frac{t}{t_0} + \frac{1}{2} x_0 \left(\lg \frac{t}{t_0}\right)^2 + \frac{1}{6} x_0 \left(\lg \frac{t}{t_0}\right)^3 + \dots$$

$$\dots + \frac{1}{n!} x_0 \left(\lg \frac{t}{t_0}\right)^n$$

$$x_n(t) = x_0 \sum_{k=0}^{n} \frac{\left(\log \frac{t}{t_0}\right)^k}{k!}$$

$$\lim_{n \to \infty} x_n(t) = x_0 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(\log \frac{t}{t_0}\right)^k}{k!} =$$

MAKLORENOV RAZVOJ

$$= x_0 e^{\lg \frac{t}{t_0}} = x_0 \frac{t}{t_0}$$

$$\boxed{x(t) = x_0 \frac{t}{t_0}}$$

Tokovi

$$\phi^t : \underset{\mathbb{R}^n}{\underset{\cap}{U}} \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

IDENTIČKO PRESLIKAVANJE

$$\frac{d}{dt}\phi^t(x) = F(\phi^t(x), t) \qquad \phi^0 = id$$

ϕ^t NAZIVAMO TOKOM VEKTORSKOG POLJA F

PRIMER 1:

$$\begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$$x_1 = C_1 e^t \qquad x_2 = C_2 e^t$$

$$\phi^t(x_1, x_2) = (x_1 e^t, x_2 e^t)$$

PRIMER 2:

$$X' = AX \qquad F(X,t) = AX$$

$$\phi^t(X_0) = e^{tA} X_0$$

DOKAZ:

1° $\frac{d}{dt}\phi^t(X_0) = F(\phi^t(X_0), t)$?

$$\frac{d}{dt}\phi^t(X_0) = \frac{d}{dt}(e^{tA} X_0) = A e^{tA} X_0$$

$$F(\phi^t(X_0), t) = A e^{tA} X_0 \qquad \checkmark$$

2° $\phi^0(X_0) = id$?

$$\phi^0(X_0) = e^{0 \cdot A} X_0 = E \cdot X_0 = X_0 \qquad \checkmark$$

① НАЋИ ТОКОВЕ ЗА ДИФЕРЕНЦИЈАЛНЕ ЈЕДНАЧИНЕ

a) $x' = x + 2t$ $\qquad F(x,t) = x + 2t$

ОПШТЕ РЕШЕЊЕ ЈЕДНАЧИНЕ ЈЕ

$$x(t) = Ce^t - 2t - 2$$

$$\left.\begin{array}{l} x(0) = x_0 \\ x(0) = C - 2 \end{array}\right\} \Rightarrow x_0 = C - 2$$

$$x(t) = (x_0 + 2)e^t - 2t - 2$$

$$\phi^t(x_0) = (x_0 + 2)e^t - 2t - 2$$

ПРОВЕРА:

1° $\frac{d}{dt}\phi^t(x_0) = \frac{d}{dt}\left((x_0+2)e^t - 2t - 2\right) = (x_0+2)e^t - 2$

$$\shortparallel$$

$F(\phi^t(x_0), t) = \phi^t(x_0) + 2t = (x_0+2)e^t - 2t - 2 + 2t = (x_0+2)e^t - 2$

2° $\phi^0(x_0) = (x_0+2)e^0 - 2 = x_0$ ✓

б) $x' = -x$

$y' = x^2 + y$

$$x' = -x \quad \Rightarrow \quad x(t) = C_1 e^{-t}$$

$$y' = (C_1 e^{-t})^2 + y = C_1^2 e^{-2t} + y$$

$$\Rightarrow y(t) = C_2 e^t - \frac{1}{3} C_1^2 e^{-2t}$$

$$\left.\begin{array}{l} x(0) = x_0 \\ x(0) = C_1 \end{array}\right\} \Rightarrow x_0 = C_1$$

$$\left.\begin{array}{l} y(0) = y_0 \\ y(0) = C_2 - \frac{1}{3}x_0^2 \end{array}\right\} \Rightarrow C_2 = \frac{1}{3}x_0^2 + y_0$$

$$\phi^t(x_0, y_0) = \left(x_0 e^{-t}, \left(\frac{1}{3}x_0^2 + y_0\right)e^t - \frac{1}{3}x_0^2 e^{-2t}\right)$$

JEDNOPARAMETARSKA FAMILIJA PRESLIKAVANJA

$$\phi^t : M \to M \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

$\ulcorner M = \mathbb{R}^n \lrcorner$

FAMILIJA ZADOVOLJAVA USLOVE

1) $\phi^{t+s} = \phi^t \circ \phi^s$

2) $\phi^0 = id$

$\ulcorner$ OVO JE DEJSTVO GRUPE $(\mathbb{R}, +)$ NA $M \lrcorner$

(3) PROVERITI DA LI SU JEDNOPARAMETARSKE FAMILIJE PRESLIKAVANJA

a) $\phi^t(x) = e^t x$

1° $\phi^{t+s}(x) = \phi^t \circ \phi^s(x)$

$$\phi^{t+s}(x) = e^{t+s}x$$

$$\phi^t(\phi^s(x)) = \phi^t(e^s x) = e^t e^s x = e^{t+s} x \quad \checkmark$$

2° $\phi^0(x) = e^0 \cdot x = x$

$$\phi^0 = id \quad \checkmark$$

b) $\theta^t(x) = t \cdot \underbrace{(1, 1, \dots, 1)}_{n} + x$

1° $\theta^{t+s}(x) = (t+s)(1, 1, \dots, 1) + x$

$$= t(1,1,\dots,1) + s(1,1,\dots,1) + x$$
$$= t(1,1,\dots,1) + \theta^s(x)$$
$$= \theta^t(\theta^s(x)) = \theta^t \cdot \theta^s (x)$$

2° $\theta^0(x) = 0\cdot(1,1,\dots,1) + x = x$

$\theta^0 = id$

④ PROVERITI DA LI SU TOKOVI IZ ZADATKA

① JEDNOPARAMETARSKE FAMILIJE PRESLIKAVANJA

a) $\phi^t(x_0) = (2+x_0)e^t - 2t - 2$

$$\phi^{t+s}(x_0) = (2+x_0)e^{t+s} - 2t - 2s - 2$$

$$\phi^t(\phi^s(x_0)) = \phi^t\left((2+x_0)e^s - 2s - 2\right)$$

$$= \left(\cancel{2} + (2+x_0)e^s - 2s - \cancel{2}\right)e^t - 2t - 2$$

$$= (2+x_0)e^{s+t} - 2se^t - 2t - 2$$

$$\phi^{t+s} = \phi^t \cdot \phi^s \Rightarrow 2s = 2se^t \quad \lightning$$

$\Rightarrow$ NIJE JEDNOPARAMETARSKA FAMILIJA

b) PROVERITI ZA DOMAĆI (JESTE)

VAŽI <u>TEOREMA:</u>

ϕ^t JE JEDNOPARAMETARSKA FAMILIJA

$\Leftrightarrow$ F JE AUTONOMNO

Liuvilova teorema

Neka je vektorsko polje F autonomno, ϕ^t rešenje sistema i

$$V(t) := Vol(\phi^t(D))$$

D - kompaktan i merljiv skup

[Vol - zapremina, tj. u $\mathbb{R}$ dužina, u $\mathbb{R}^2$ površina]

$$\frac{dV(t)}{dt} = \int \dots \int_{\phi^t(D)} \operatorname{div} F \, dy_1 \dots dy_n$$

$\operatorname{div} F = \nabla \cdot F$ - divergencija vektorskog polja

Posledica:

$\operatorname{div} F > 0 \Rightarrow \frac{d(V(t))}{dt} > 0 \Rightarrow$ zapremina se povećava

$\operatorname{div} F < 0 \Rightarrow$ zapremina se smanjuje

$\operatorname{div} F = 0 \Rightarrow$ zapremina se čuva

Specijalno:

$$X' = AX \qquad F(X, t) = AX$$

$$\operatorname{div} F = \frac{\partial F_1}{\partial x_1} + \frac{\partial F_2}{\partial x_2} + \dots + \frac{\partial F_n}{\partial x_n} = Tr A$$

Primeri:

1) $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ $\quad Tr A = 3 \Rightarrow Vol \nearrow$

nestabilni čvor

2) $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ $\quad Tr\, A = 0 \Rightarrow$ ZAPREMINA SE ČUVA

CENTAR

3) $x_1' = e^{x_1} + x_2$

$x_2' = x_2 - x_1$

$F(x_1, x_2) = (e^{x_1} + x_2, \; x_2 - x_1)$

$\mathrm{div}\, F = e^{x_1} + 1 > 0 \quad \Rightarrow$ VOL $\nearrow$

4) $x' = x^2 + 1$

$\frac{dx}{dt} = x^2 + 1$

$x = \tan(t + c)$

$x(0) = x_0$

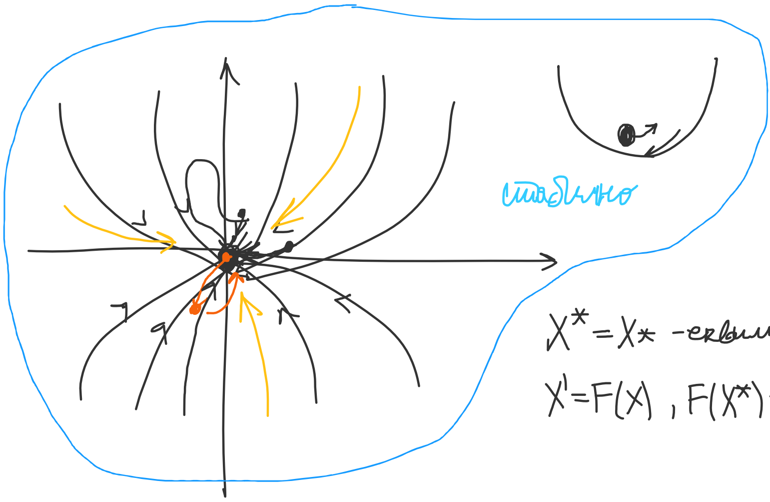
$x = \tan(t + \arctan x_0)$

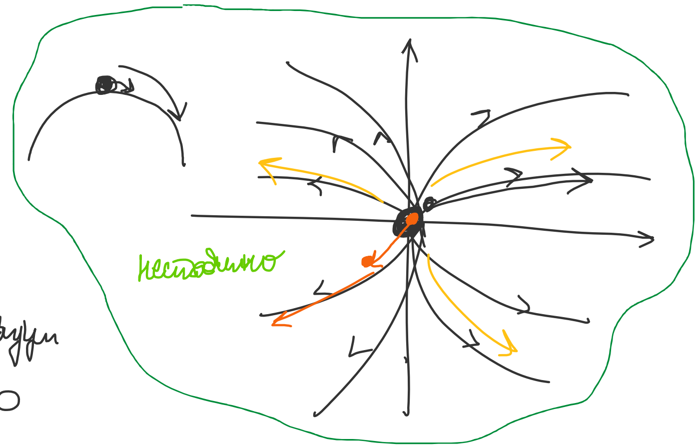
$F(x) = x^2 + 1$

$\mathrm{div}\, F = (x^2+1)' = 2x$

$x > 0 \Rightarrow \mathrm{div}\, F > 0 \Rightarrow$ DUŽINA SE POVEĆAVA

$x < 0 \Rightarrow \mathrm{div}\, F < 0 \Rightarrow$ DUŽINA SE SMANJUJE





$X^* = X_*$ - еквилибријум

$X' = F(X)$, $F(X^*) = 0$

Деф Еквилибријум X^* је:

1) стабилан, ако $(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall X(t)$ решење, $X(t_0) = X_0)$ $\|X_0 - X^*\| < \delta \Rightarrow \|X(t) - X^*\| < \varepsilon$, $\forall t \geq T$

2) нестабилан, ако није стабилан

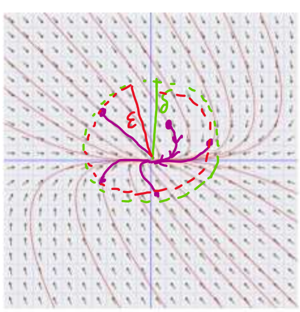
3) асимптотски стабилан, ако је стабилан и $(\exists \delta > 0)$ $\|X_0 - X^*\| < \delta \Rightarrow \lim\limits_{t\to\infty} X(t) = X^*$.

1. Скицирати фазне портрете динамичких система, а затим испитати стабилност њихових еквилибријума:

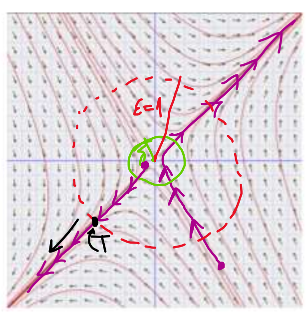
а) $x_1' = -x_1 + 2x_2$, $x_2' = -3x_2$

б) $x_1' = -x_1 + 3x_2$, $x_2' = 5x_1 - 3x_2$

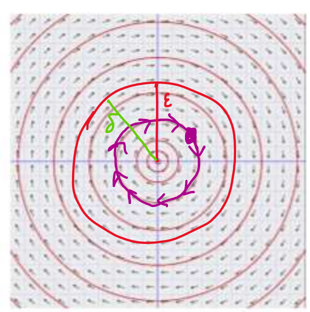
в) $x_1' = x_2$, $x_2' = -x_1$.



стабилан чвор



седло



центар

а) ε-дато

$\delta = \varepsilon$ $X_0 \in B((0,0);\delta) \Rightarrow X(t) \in B((0,0);\varepsilon)$, $\forall t \geq t_0$ ✓

стабилан, да ли је асимптотски? (АС) ✓ $\lim\limits_{t\to\infty} X(t) = X^*$

б) нестабилан $\Leftrightarrow$ $\neg$ стабилан

$(\exists \varepsilon > 0)(\forall \delta > 0)(\exists X(t)$ решење, $X(t_0) = X_0)$ $\|X_0 - X^*\| < \delta \wedge \|X(t) - X^*\| \geq \varepsilon$, за неко $t \geq T$

б) нестабилан $\iff \neg$ стабилан

$(\exists \varepsilon>0)(\forall \delta>0)(\exists X(t)$ решење, $X(t_0)=X_0)$ $\|X_0-X^*\|<\delta \wedge \|X(t)-X^*\|\geq \varepsilon$, за неко $t\geq T$

$\varepsilon=1$ $\quad \|X(t_0)\|<\delta$ (лева лудница)

нестабилан

$\exists T\geq 0,\ \forall t\geq T,\ \|X(t)\|\geq 1$

в) $\delta=\varepsilon$

$\|X(t)\|=\|X_0\|,\ \forall t$

$$\|X_0\|<\delta \Rightarrow \|X(t)\|<\varepsilon \ \checkmark$$
$$\Updownarrow$$
$$\|X_0\|<\delta \Rightarrow \|X_0\|<\delta \ \checkmark$$

$\Rightarrow$ стабилан

да ли је АС? није!

ппс $\lim_{t\to\infty} X(t)=(0,0) \Rightarrow \lim_{t\to\infty} \underbrace{\|X(t)\|}_{=\|X_0\|}=\|(0,0)\|=0$

$\Rightarrow \|X_0\|=0 \Rightarrow X_0=(0,0)$ ↯

домаћи: доказати и алгебарски (решити системе)

$\boxed{\text{I}}$ (Прва Т Љапунова, метод сопс вр.)

$X'=F(X)$, $A=dF(X^*)$

1) Свака сопс вр λ од A има $Re(\lambda)<0 \Rightarrow X^*$ асимптотски стабилан

2) Ако $\exists \lambda$ сопс вр од A тд $Re(\lambda)>0 \Rightarrow X^*$ нестабилан

$X'=F(X) \rightsquigarrow X'=AX$, $A=dF(\underline{X^*})$

$F=(F_1,\dots,F_n)$

$X=(x_1,\dots,x_n)$

$$dF(X^*)=\begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1}(X^*) & \frac{\partial F_1}{\partial x_2}(X^*) & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial x_n}(X^*) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial F_n}{\partial x_1}(X^*) & \cdots & \cdots & \frac{\partial F_n}{\partial x_n}(X^*) \end{bmatrix}$$

A је матрица линеаризације, а $X'=AX$ је линеаризација система у тачки X^*

$F(X)\approx F(X^*)+\underbrace{dF(X^*)}_{A}\cdot(X-X^*)+\dots$

$X'=F(X) \rightsquigarrow X'\approx A(X-X^*)$, уз смену $Y=X-X^* \Rightarrow Y'=AY$ линеаризација

2. Испитати стабилност еквилибријума из задатка 1 помоћу теореме Љапунова о сопственим вредностима.

$X'=AX=F(X)$

$$X' = AX = F(X)$$

$$F(X) = A \cdot X \Rightarrow dF(X) = A \Rightarrow dF(X^*) = A$$

а) $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}$, $\lambda_1 = -1, \lambda_3 = -3$, $Re(\lambda_1) = -1 < 0$, $Re(\lambda_2) = -3 < 0$ $\Rightarrow$ X^* је АС

б) $A = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 5 & -3 \end{bmatrix}$, $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = -6$, $Re(\lambda_1) = 2 > 0$, $Re(\lambda_2) = -6 < 0$ $\Rightarrow$ X^* је нестабилан

в) $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$, $\lambda_{1/2} = \pm i$, $Re(\lambda_{1/2}) = 0$ $\Rightarrow$ из Т не можемо закључити

3. Одредити све еквилибријуме динамичког система

$$\begin{aligned} x_1' &= e^{x_1} - e^{-3x_3} \\ x_2' &= 4x_3 - 3\sin(x_1 + x_2) \\ x_3' &= \ln(1 - 3x_1 + x_3), \end{aligned}$$

а затим испитати стабилност еквилибријума $X^* = (0, 0, 0)$.

$$F(x_1, x_2, x_3) = (\underbrace{e^{x_1} - e^{-3x_3}}_{F_1}, \underbrace{4x_3 - 3\sin(x_1 + x_2)}_{F_2}, \underbrace{\ln(1 - 3x_1 + x_3)}_{F_3})$$

$F = 0 \Rightarrow F_1 = F_2 = F_3 = 0$

$e^{x_1} - e^{-3x_3} = 0 \rightsquigarrow e^{x_1} = e^{-3x_3} \rightsquigarrow x_1 = -3x_3$

$4x_3 - 3\sin(x_1 + x_2) = 0$

$\ln(1 - 3x_1 + x_3) = 0 \rightsquigarrow 1 - 3x_1 + x_3 = 1 \rightsquigarrow x_3 = 3x_1 = 3 \cdot (-3x_3) = -9x_3 \Rightarrow x_3 = 0$

$x_1 = 0$

$4 \cdot 0 - 3\sin(0 + x_2) = 0 \rightarrow \sin(x_2) = 0 \rightsquigarrow x_2 = k\pi, k \in \mathbb{Z}$

$$X^* \in \{(0, k\pi, 0) \mid k \in \mathbb{Z}\}$$

$X^* = (0, 0, 0)$ ·

$A = dF(X^*)$

$$dF(X) = \begin{bmatrix} e^{x_1} & 0 & 3e^{-3x_3} \\ -3\cos(x_1 + x_2) & -3\cos(x_1 + x_2) & 4 \\ \frac{-3}{1 - 3x_1 + x_3} & 0 & \frac{1}{1 - 3x_1 + x_3} \end{bmatrix}$$

$$A = dF(0, 0, 0) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ -3 & -3 & 4 \\ -3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \lambda_1 = -3, \lambda_{2/3} = 1 \pm 3i$$

$$\left.\begin{aligned} Re(\lambda_1) &= -3 < 0 \\ Re(\lambda_{2/3}) &= 1 > 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow X^* \text{ је нестабилан}$$

$\boxed{\text{Т}}$ Нека је X^* еквилибријум система $X' = F(X)$. У некој околини $U \ni X^*$ постоји ф-ја $V: U \to \mathbb{R}$ тд

1) $V \in C^1(\mathcal{U})$

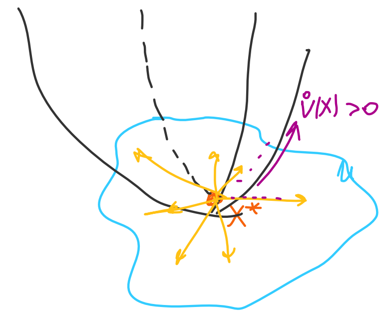
2) $V(X^*)=0$ и $V(X)>0$, $\forall X \in \mathcal{U}\setminus\{X^*\}$ (позитивно дефинитна)

3) Важи једна од следећих ствари:

- $\mathring{V}(X) \le 0$, $\forall X \in \mathcal{U}\setminus\{X^*\} \Rightarrow X^*$ стабилан
- $\mathring{V}(X) < 0$, $\forall X \in \mathcal{U}\setminus\{X^*\} \Rightarrow X^*$ АС
- $\mathring{V}(X) > 0$, $\forall X \in \mathcal{U}\setminus\{X^*\} \Rightarrow X^*$ нестабилан

$\mathring{V}(X) = \langle \nabla V(X), F(X)\rangle = \nabla V(X) \circ F(X) \to$ извод V дуж трајекторије

V – функција Љапунова



Често: $V(X) = a_1x_1^2 + \dots + a_nx_n^2$
$a_1, \dots, a_n > 0$

4. Одредити све еквилибријуме динамичког система

$$x_1' = (x_3+1)(2x_2 - x_1)$$
$$x_2' = -(x_3+1)(x_1+x_2)$$
$$x_3' = -x_3^3,$$

а затим испитати њихову стабилност.

$$\left.\begin{array}{l}(x_3+1)(2x_2-x_1)=0\\ -(x_3+1)(x_1+x_2)=0\end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{l}2x_2-x_1=0\\ -x_1-x_2=0\end{array}\right\} x_1=x_2=0$$

$$-x_3^3=0$$

$\hookrightarrow x_3 = 0$

$X^* = (0,0,0)$

Дакле: методом сопств. вр не добијамо одговор

$V(x_1,x_2,x_3) = ax_1^2 + bx_2^2 + cx_3^2$, $a,b,c>0$

1) $V \in C^1(\mathbb{R}^3)$ ✓

$\nabla V(x_1,x_2,x_3) = (2ax_1, 2bx_2, 2cx_3)$

2) $V(0,0,0)=0$, $V(X)>0$, $X \neq X^*$

3) $\mathring{V}(X) = \langle \nabla V(X), F(X)\rangle = 2ax_1\cdot(x_3+1)(2x_2-x_1) + 2bx_2\,(x_3+1)(-x_1-x_2) + 2cx_3\,(-x_3^3) =$

$$= \underbrace{(x_3+1)}_{>0}\big(4ax_1x_2 \underbrace{-2ax_1^2}_{\le 0} - 2bx_1x_2 \underbrace{-2bx_2^2}_{\le 0}\big) \underbrace{-2cx_3^4}_{\le 0}$$

хоћемо околину од $(0,0,0)$ $\mathcal{U} = \{\|x\| < \frac{1}{2}\}$ и ту је $x_3+1>0$

хоћемо да је ово $=0$
$4a = 2b$

нпр $a=1, b=2, c=1$:

$V(x_1,x_2,x_3) = x_1^2 + 2x_2^2 + x_3^2$

$\mathring{V}(x_1,x_2,x_3) = (x_3+1)(-2x_1^2 - 4x_2^2) - 2x_3^4 \le 0$ за $X \in \mathcal{U}\setminus\{X^*\}$

$$V(x_1,x_2,x_3) = x_1^2 + 2x_2^2 + x_3^2$$

$$\overset{\circ}{V}(x_1,x_2,x_3) = (x_3+1)(-2x_1^2 - 4x_2^2) - 2x_3^4 \leq 0 \quad \text{за} \quad X \in \mathcal{U} \setminus \{X^*\}$$

$$X \neq X^* : \ \overset{\circ}{V} < 0 \implies X^* \text{ је АС}$$

5. Доказати да је координатни почетак стабилан, али не и асимптотски стабилан еквилибријум система
1) $X' = AX$, где је $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$. Испитати стабилност еквилибријума $X^* = (0,0)$ система:

2) а) $X' = AX + \begin{bmatrix} -x_1^3 - x_1x_2^2 \\ -x_2^3 - x_1^2x_2 \end{bmatrix}$ б) $X' = AX + \begin{bmatrix} x_1^3 + x_1x_2^2 \\ x_2^3 + x_1^2x_2 \end{bmatrix}$ в) $X' = AX + \begin{bmatrix} -x_1x_2 \\ x_1^2 \end{bmatrix}$

3) Показати да је у сва три случаја матрица $dF(\mathbf{0})$ једнака и да метод сопствених вредности не даје одговор.

додати: 1) погледати 1в

3) добиће се $dF(0)=A$ у сва три случаја, погледати 2в

а) $$X' = \begin{bmatrix} -x_2 - x_1^3 - x_1x_2^2 \\ x_1 - x_2^3 - x_1^2x_2 \end{bmatrix} \leftarrow F(X)$$

$$V(x_1,x_2) = ax_1^2 + bx_2^2 \quad , \ a,b>0 \qquad \nabla V = (2ax_1, 2bx_2)$$

1) $V \in C^1(\mathbb{R}^2)$

2) $V(X^*) = 0$, $V(X) > 0$, $X \neq X^*$

3) $$\overset{\circ}{V}(X) = 2ax_1\,(-x_2 - x_1^3 - x_1x_2^2) + 2bx_2\,(x_1 - x_2^3 - x_1^2x_2) = \ldots = \underbrace{-2ax_1^4}_{\leq 0}\ \underbrace{-2bx_2^4}_{\leq 0}\ \underbrace{-2(a+b)x_1^2x_2^2}_{\leq 0} + \underbrace{x_1x_2(2b-2a)}_{?}$$

$2b = 2a$

нпр $a = b = 1$

$$V(x_1,x_2) = x_1^2 + x_2^2$$

$$\overset{\circ}{V}(x_1,x_2) = -2x_1^4 - 2x_2^4 - 4x_1^2x_2^2 = -2(x_1^2+x_2^2)^2 < 0 \quad , \forall X \neq X^* \implies X^* \text{ је АС}$$

б) $V(x_1,x_2) = x_1^2 + x_2^2$

$$\overset{\circ}{V}(X) = \ldots = 2(x_1^2+x_2^2)^2 > 0 \ , \forall X \neq X^* \implies X^* \text{ је нестабилан}$$

в) $V(x_1,x_2) = x_1^2 + x_2^2$

$$\overset{\circ}{V}(X) = \ldots = 0 \implies X^* \text{ је стабилан}$$

додати: $x_1' = x_2 - x_1x_2^2$
$x_2' = -x_1^3$

а) $V(x_1,x_2) = ax_1^2 + bx_2^2$ се не може користити као ф-ја Љапунова

б) $V(x_1,x_2) = ax_1^4 + bx_2^2 \leftarrow$ потражити у овом облику

6. Испитати стабилност положаја равнотеже $X^* = (0,0)$ динамичког система

$$x_1' = -\sin x_2$$
$$x_2' = x_1.$$

$A = JF(0,0) \to$ не даје одговор

$V = ?$, $F(x_1,x_2) = (-\sin x_2, x_1)$

циљамо: да буде стабилан (али не асимптотски)

хоћемо $\quad \mathring{V}(X) = 0 = \underbrace{\langle \nabla V(X), F(X)\rangle}_{\nabla V(X) = (v_1, v_2)} = \underbrace{v_1}_{= x_1}(-\sin x_2) + \underbrace{v_2}_{= \sin x_2}\cdot x_1 = 0$

Хоћемо: $\quad \nabla V(X) = (x_1, \sin x_2) \rightsquigarrow V = ?$

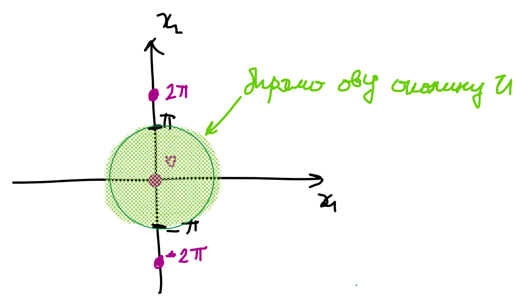
$$V(x_1,x_2) = \frac{x_1^2}{2} - \cos x_2 + C \rightsquigarrow \text{позитивно дефинитна}$$

$V(0,0) = 0 \longrightarrow C = 1$

$V(X) > 0 \ , X \neq (0,0)$

$$V(X) = \underbrace{\frac{x_1^2}{2}}_{\geq 0} + \underbrace{1 - \cos x_2}_{\geq 0} > 0 \ , \quad X \in \mathcal{U} \setminus \{(0,0)\}$$

када су $\frac{x_1^2}{2} = 1 - \cos x_2 = 0$? $\quad x_1 = 0$ и $x_2 = 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$



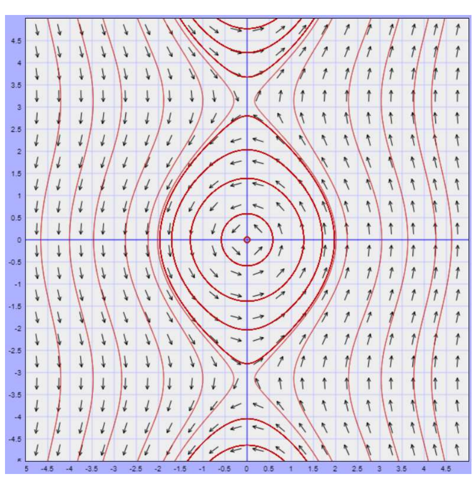
бирамо нпр $\quad \mathcal{U} = B((0,0); \pi)$

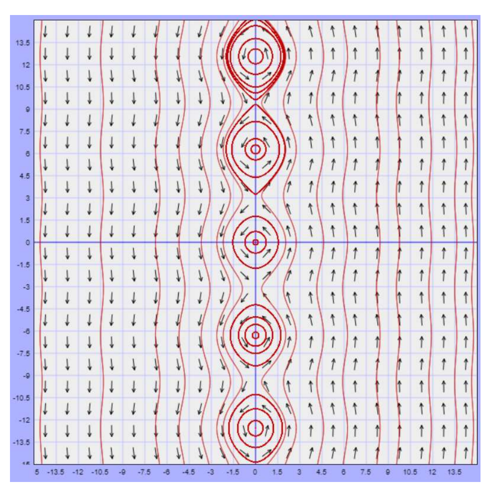
1) $V \in C^1(\mathbb{R}^2)$

2) $V(0,0) = 0 \ , V(X) > 0 \ , X \in \mathcal{U} \setminus \{(0,0)\}$

3) $\mathring{V}(X) = \langle \nabla V(X), F(X) \rangle = 0 \leq 0$

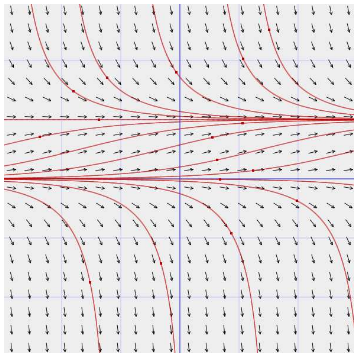
$\Rightarrow X^* = (0,0)$ стабилан еквилибријум



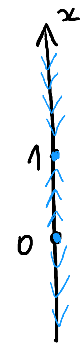


Присетимо се једначине $x' = x(1-x)$

чије интегралне криве изгледају овако



и чији фазни портрет изгледа овако



Еквилибријум $x=0$ је нестабилан, а $x=1$ је стабилан асимптотски.

Покажите ово методом сопствених вредности.

4. Примери из екологије

4.1. Модел раста популације једне врсте. Најједноставнији модел раста популације врсте је експоненцијални модел. То је случај кад је брзина раста популације пропорционална тренутном броју јединки:

$$x'(t) = ax(t).$$

Иако је број популације природан, ми га моделирамо реалним позитивним бројем.[5] Овде је a реална константа која се зове стопа раста и која зависи од врсте, ситуације, ресурса (рецимо од воде, хране, светла или другог неопходног услова за опстанак врсте). Стопа раста a може и бити и негативна (ако је нпр. недовољно хране, па број јединки опада).

Ову једначину наравно знамо да решимо:

$$x(t) = x_0 e^{at}.$$

Приметимо да је, за $a \neq 0$, $x_* = 0$ једини еквилибријум, који је асимптотски стабилни за $a < 0$, а нестабилни за $a > 0$.

Нешто сложенији (и реалнији) модел раста популације једне врсте је тзв. *логистиички модел* који је самоограничавајући у смислу да се повећањем броја јединки на неки начин и смањује брзина раста популације, будући да постоји већа потрошња неопходних ресурса. Овај аспект нисмо узимали у обзир у горњем, најједноставнијем примеру. Како је јасно да брзина раста популације мора бити на известан начин пропорционална броју јединки, то се у логистичом моделу узима да је је брзина раста пропорционална и тренутном броју јединки и количини преосталих ресурса, тј:

$$x'(t) = ax\left(1 - \frac{x}{K}\right),$$

где се реалан број $a > 0$ поново зове стопа раста, а реалан број $K > 0$ ниво засићености.

[5] На $\mathbb{R}$ имамо развијен диференцијални рачун, а на $\mathbb{N}$ не.

Приметимо да су у овом случају еквилибријуми $x_* = 0$ и $x_* = K$. Њихову стабилност можемо испитати помоћу методе сопствених вредности:

$$F(x) = ax\left(1 - \frac{x}{K}\right) \Rightarrow F'(x) = a\left(1 - \frac{2x}{K}\right), \quad F'(0) = a > 0,\ F'(K) = -a < 0,$$

што значи да је $x_* = 0$ нестабилни, а $x_* = K$ асимптотски стабилни еквилибријум.

До истог закључка смо могли да дођемо и непосредним решавањем једначине:

$$x(t) = \frac{Kx_0e^{at}}{K + x_0(e^{at} - 1)}.$$

Овај закључак о стабилности еквилибријума можемо да интерпретирамо овако: ма колико био мали почетни број јединки, он ће се брзо увећати и одвојити од нуле. Међутим ако је почетни број јединки близак нивоу засићености, он ће њему близак и остати, штавише, приближаваће му се са растом времена.

4.2. Нулклинације. У ситуацији у којој хоћемо да скицирамо (без решавања) планарни динамички систем, може нам бити корисно једно веома једноставно опажање, скицирање нулклинација. *Нулклинације* система

$$\begin{aligned} x'(t) &= P(x,y) \\ y'(t) &= Q(x,y) \end{aligned}$$

су криве у равни

$$P(x,y) = 0 \quad \text{и} \quad Q(x,y) = 0.$$

Зашто нам је корисно да скицирамо ове криве у равни:

- Дуж нулклинација трајекторије система су или вектикалне или хоризонталне. Заиста, дуж криве $P(x,y) = 0$ имамо да је $x' = 0$ па је тангентни вектор (односно крива) вертикалан и то усмерен нагоре ако је $Q(x,y) > 0$ односно надоле ако је $Q(x,y) < 0$. Слично резонујемо и за нулклинације $Q(x,y) = 0$, у овом случају су криве хоризонталне. Дакле, трајекторије система секу нулклинације или хоризонтално или вертикално.[6]
- У пресеку нулклинација проналазимо еквилибријуме.
- Нулклинације деле раван на неколико области (које се зову и *басени*). У свакој од тих области (уколико су P и Q непрекидне функције) су знаци извода x' и y' (односно функција P и Q) константни. То значи да се у свакој од тих области криве крећу „на исти начин”, или нагоре и надесно, или нагоре и налево, или надоле и надесно, или надоле и налево.
- Ако не обратимо пажњу на усмереност кривих, него само на њихов облик, у сваком од претходно споменутих области криве или опадају или расту. Заиста

  $$\frac{dy}{dx} = \frac{P(x,y)}{Q(x,y)}$$

  је сталног знака у свакој од области одређеној нулклинацијама.

4.3. Лотка–Волтерин систем. Лотка[7]–Волтерин[8] систем је једноставан еколошки модел раста популације предатора и плена (неких животињских врста). Нека x означава број животиња које су плен (нпр. зечева). Претпостављамо да се, ако нема спољашњег непријатеља, број

[6] Ово резоновање не можемо да применимо на случај када је нулклинација истовремено и инваријантан скуп система, јер је ниједна трајекторија не сече. Пример овакве ситуације су фазни портрети чвора и седла, док нам за сучајеве центра или спирале могу помоћи скице нулклинација.

[7] Alfred James Lotka (1880–1949), амерички математичар, физикохемичар, биофизичар и статистичар.

[8] Vito Volterra, (1860–1940) италијански математичар и физичар.

животиња увећава (а не опада) сразмерно тренутном броју јединки,[9] тј, да нема предатора, имали бисмо једначину са почетка поглавља:

$$x' = ax, \quad \text{за} \quad a > 0.$$

Ако је, међутим, присутан и предатор (нпр. лисица), означимо га са y, онда узимамо да је брзина опадања плена сразмерна броју сусрета предатора и плена, што је производ $x \cdot y$. Зато је једначина по x коју узимамо за модел

$$x' = x(a - by), \quad \text{за} \quad a, b > 0.$$

Што се тиче брзине раста броја предатора y, у одсуству плена, он ће опадати брзином сразмерном тренутном броју јединки (ово би била популација са негативном стопом раста, будући да нема услова за живот, односно хране):

$$y' = -dy, \quad \text{за} \quad d > 0.$$

Ако је предатор присутан, онда је, као и малочас, брзина раста популације предатора сразмерна броју сусрета предатора и плена, па једначина по y коју посматрамо постаје:

$$y' = y(cx - d), \quad \text{за} \quad c, d > 0.$$

Мотивисани овом дискусијом, посматрајмо систем

$$\begin{aligned} x' &= x(a - by) \\ y' &= y(cx - d), \end{aligned}$$

где су $a, b, c, d > 0$ са почетним условом (x_0, y_0) у првом квадранту. Приметимо да цело решење остаје у првом квадранту јер не може да пресече координатне осе које су такође решења (за $x_0 = 0$ или $y_0 = 0$). То је и очекивано у оваквом моделу јер број јединки не може да буде негативан.

Нулклинације овог система су праве:

$$x = 0, \; y = \frac{a}{b}, \; y = 0 \text{ и } x = \frac{d}{c}.$$

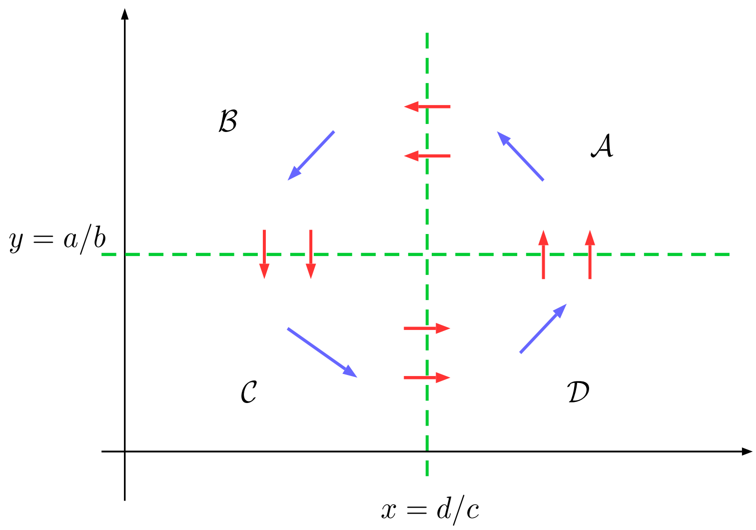
Праве $x = 0$ и $y = 0$ су и инваријантне, тј. полуправе $x = 0$, $y > 0$ и $y = 0$, $x > 0$ су трајекторије система, тако да на њих не примењујемо описане резоне. Што се тиче правих (односно делова правих у првом квадранту) $x = a/b$ и $y = d/c$ (зелене праве на Слици 1) закључујемо следеће. Праву $x = d/c$ трајекторије секу хоризонтално, и то усмерене су надесно у делу равни $y < a/b$, а налево у делу равни $y > a/b$. Праву $y = a/b$ трајекторије секу вертикално и нагоре то у делу равни $x > d/c$, а надоле у делу $x < d/c$ (црвене стрелице на Слици 1).

Нулклинације деле први квадрант на четири дела:

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &:= \left\{ (x, y) \mid x > \frac{d}{c}, y > \frac{a}{b} \right\} \\ \mathcal{B} &:= \left\{ (x, y) \mid 0 < x < \frac{d}{c}, y > \frac{a}{b} \right\} \\ \mathcal{C} &:= \left\{ (x, y) \mid 0 < x < \frac{d}{c}, 0 < y < \frac{a}{b} \right\} \\ \mathcal{D} &:= \left\{ (x, y) \mid x > \frac{d}{c}, 0 < y < \frac{a}{b} \right\}. \end{aligned}$$

У сваком од ових делова знакови извода x' и y' су константи, тако да нам кретање система сугерише правац (и смер) векторског поља приказан плавим стрелицама на Слици 1. Можемо да

[9] Овде претпостављамо да хране за плен, нпр. траве, има у изобиљу.



Слика 1. Лотка–Волтерин модел предатор–жртва: нуклинације и правци дуж њих и у областима $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$, $\mathcal{D}$.

наслутимо, на основу свега описаног да ће трајекторије система „кружити" око тачке $(d/c, a/b)$, у смислу да важи:

$$\begin{aligned}
(x,y) \in \mathcal{A} \quad &\Rightarrow \phi^t((x,y)) \in \mathcal{B}, \quad \text{за неко} \quad t > 0\\
(x,y) \in \mathcal{B} \quad &\Rightarrow \phi^t((x,y)) \in \mathcal{C}, \quad \text{за неко} \quad t > 0\\
(x,y) \in \mathcal{C} \quad &\Rightarrow \phi^t((x,y)) \in \mathcal{D}, \quad \text{за неко} \quad t > 0\\
(x,y) \in \mathcal{D} \quad &\Rightarrow \phi^t((x,y)) \in \mathcal{A}, \quad \text{за неко} \quad t > 0.
\end{aligned}$$

Докажимо прво од наведених тврђења. Нека је $(x_0, y_0) \in \mathcal{A}$. Докле год је $(x(t), y(t)) \in \mathcal{A}$, $x(t)$ опада, а $y(t)$ расте. Приметимо такође да је решење дефинисано за све t док је $(x(t), y(t)) \in \mathcal{A}$. Заиста,

$$\frac{y'(t)}{y(t)} = cx(t) - d < cx_0 - d,$$

па је[10]

$$y(t) \leq y_0 e^{(cx_0+d)t},$$

тј. можемо га продужити на сваки сегмент. Што је тиче x координате, имамо

$$\frac{x'(t)}{x(t)} = a - by(t) < a - by_0 < 0,$$

па је

$$x(t) \leq x_0 e^{(a-by_0)t}. \tag{$\heartsuit$}$$

Одавде закључујемо и да се x може продужити докле год је у $\mathcal{A}$. Из ($\heartsuit$) следи и да ће, за довољно велико t бити $x(t) < d/c$. Заиста, кад би било $x(t) \geq d/c$ за свако $t \geq 0$, неједнакост ($\heartsuit$) не би важила.

Како y расте, то је $y(t) > y_0 > a/b$, па је $(x(t), y(t)) \in \mathcal{B}$.

У пресеку нуклинација налазимо еквилибријуме $(x_*, y_*) = (0,0)$ и $(x_*, y_*) = (d/c, b/a)$.

Покушајмо методом сопствених вредности да испитамо стабилност еквилибријума. Имамо два еквилибријума $(0,0)$ и $(d/c, a/b)$. добијамо

$$dF(0,0) = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & -d \end{bmatrix}, \quad dF\left(\frac{d}{c}, \frac{a}{b}\right) = \begin{bmatrix} 0 & \frac{-bd}{c} \\ \frac{ac}{b} & 0 \end{bmatrix},$$

[10] Овде користимо резоновање примењено више пута до сад.

одакле закључујемо да је $(0,0)$ нестабилни еквилибријум, док о тачки $(d/c, a/b)$ немамо закључак.

Потражимо, зато, функцију Љапунова која ће нам дати одговор за $\mathbf{x}_* = (d/c, a/b)$. Покушајемо да је потражимо у облику $V(x,y) = f(x) + g(y)$ и са претпоставком да је она константна дуж решења. То би значило да је

$$\frac{d}{dt}V(x(t), y(t)) = 0 \Rightarrow \langle \nabla V, F \rangle = 0,$$

одакле читамо

$$f'(x)x(a - by) + g'(y)y(cx - d) = 0 \Rightarrow \frac{f'(x)x}{cx - d} = -\frac{g'(y)y}{a - by}.$$

Како лева страна последње једнакости не зависи од y, а десна од x, закључујемо да су обе константе. Ако ставимо да су обе једнаке јединици (било која друга константа ће само да рескалира функцију V), добијамо:

$$f(x) = cx - d\ln x + const, \quad g(y) = by - a\ln y + const.$$

Како се строги локални минимум функције

$$h(x,y) := cx - d\ln x + by - a\ln y$$

достиже у тачки $(d/c, a/b)$ бирамо:

$$V(x,y) := f(x) + g(y) = cx - d\ln x + by - a\ln y - h\left(\frac{d}{c}, \frac{a}{b}\right).$$

Ова функција сада јесте функција Љапунова која нам обезбеђује да је тачка $\mathbf{x}_* = (d/c, a/b)$ стабилни еквилибријум.

Може се показати и више, да су трајекторије Лотка – Волтериног система у ствари периодичне,[11] али то нећемо радити на овом курсу. Одавде специјално следи да $(x_*, y_*) = (d/c, a/b)$ није асимптотски стабилни еквилибријум.

4.4. Компетитивне врсте. Као последњи пример из екологије наводимо модел раста популација двеју врста које користе заједничке ресурсе за живот (компетитивне су). Природно је да модификујемо логистички модел, и то тако да брзина раста популације постаје негативна када збир јединки обе врсте превазиђе неки ниво. Систем једначина који моделује ову ситуацију је:

$$\begin{aligned} x'(t) &= r_1\left(1 - \frac{x}{K_1} - \beta_1 y\right)x \\ y'(t) &= r_2\left(1 - \frac{y}{K_2} - \beta_2 x\right)y. \end{aligned} \tag{85}$$

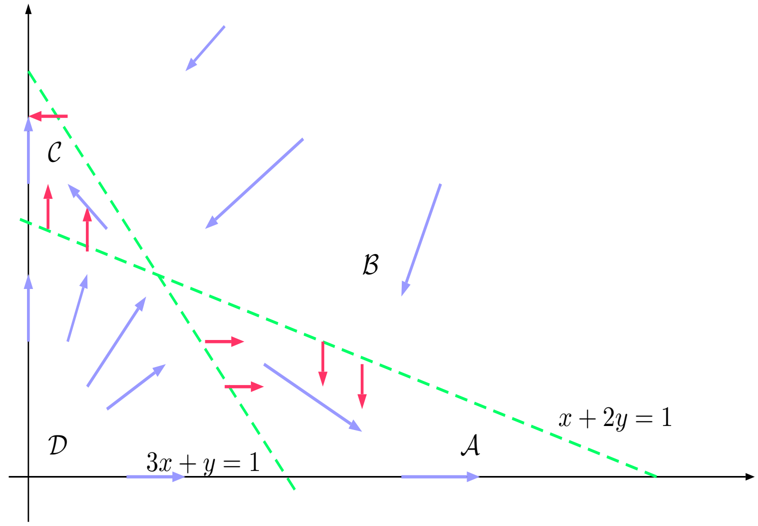
Приметимо да се у случају $\beta_1 = 0$ прва једначина своди на логистичку једначину. Описаћемо кретање система за специјални избор параметара, да бисмо поједноставили рачун.

Пример 160. (Изумирање врсте.) Нека је $r_1 = r_2 = K_1 = K_2 = 1$, $\beta_1 = 2$, $\beta_2 = 3$. Тада систем постаје:

$$\begin{aligned} x'(t) &= (1 - x - 2y)\,x \\ y'(t) &= (1 - y - 3x)\,y. \end{aligned}$$

Нулклинације система су праве $x = 0$ и $y = 0$ које су инваријантни скупови, и праве $x+2y = 1$ и $3x + y = 1$, означене су зеленом испрекиданом линијом на Слици 2. Праву $x + 2y = 1$ трајекторије секу вертикално и усмерене су као на Слици 2, а праву $3x + y = 1$ трајекторије секу хоризонтално и означене су црвеним стрелицама на Слици 2. Нулклинације деле први

[11] Какву еколошку интерпретацију има ова чињеница?



Слика 2. Компетитивне врсте у случају истребљења: нуклинације и правци дуж њих и у областима $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$, $\mathcal{D}$.

квадрант на четири дела $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$ и $\mathcal{D}$, означена на Слици 2. Плаве стрелице представљају правац и смер векторског поља у ове четири области. Еквилибријуми система су тачке

$$\left(\frac{1}{5},\frac{2}{5}\right), \quad (0,1), \quad (1,0), \quad \text{и} \quad (0,0).$$

Матрица извода векторског поља

$$F(x,y) = x(1-x-2y)\mathbf{i} + y(1-y-3x)\mathbf{j}$$

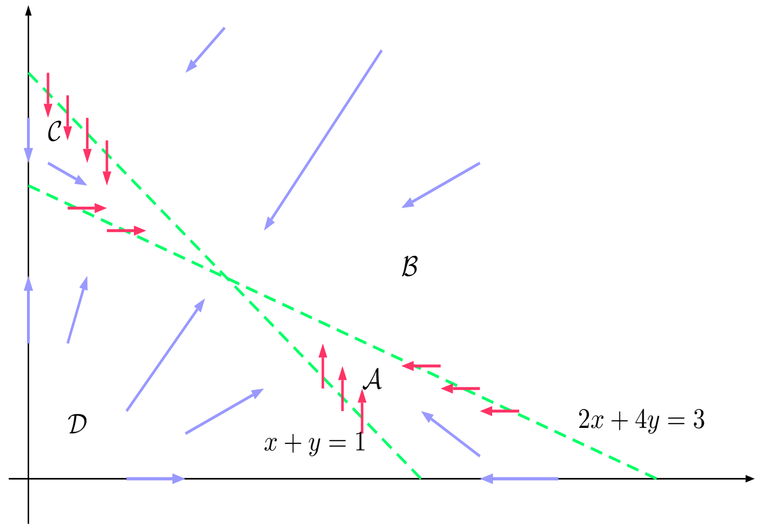
је

$$dF(x,y) = \begin{bmatrix} 1-2x-2y & -2x \\ -3y & 1-2y-3x \end{bmatrix},$$

одакле, помоћу методе сопствених вредности одмах закључујемо да су тачке $(0,1)$ и $(1,0)$ асимтотски стабилни еквилибријуми, а да су $(0,0)$ и $(1/5,2/5)$ нестабилни еквилибријуми.

Шта можемо да закључимо о кретању овог система? Приметимо да, због усмерености правца вектоског поља дуж нулклинација, трајекторије не могу да напусте области $\mathcal{A}$ и $\mathcal{C}$. Може се показати (ово превазилази оквире овог курса) да постоји једнодимензиона стабилна многострукост[12] тачке $(1/5,2/5)$ која пролази кроз области $\mathcal{C}$ и $\mathcal{D}$, односно по једна трајекторија у свакој од ових области која „увире" у $(1/5,2/5)$. Све остале трајекторије које почињу у $\mathcal{B}$ или $\mathcal{D}$ увиру у $\mathcal{A}$ или $\mathcal{C}$. Може се показати (и ово је ван оквира овог курса) да у овом систему, као и у сваком систему типа (85), постоји $\lim_{t\to\infty}\phi^t(x,y)$, за свако (x,y), као и да је тај лимес еквилибријум. На основу смера и правца векторског поља у областима $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ закључујемо да све тачке из $\mathcal{A}$ теже ка $(0,1)$, а све из $\mathcal{C}$ ка $(1,0)$. Како све трајекторије из области $\mathcal{B}$ и $\mathcal{D}$ (осим по једне из сваке) заврше у $\mathcal{A}$ или $\mathcal{C}$, закључујемо да, осим горе споменуте стабилне многострукости, свака трајекторија тежи ка једном од еквилибријума $(0,1)$ или $(1,0)$. Еколошка интерпретација овог закључка је да, у компетитивном систему са овако изабраним параметрима, за скоро сваку почетну вредност двеју врста, у далекој будућности можемо да очекујемо истребљење једне од њих. ✓

[12] Стабилна многострукост еквилибријума $\mathbf{x}_*$ је скуп свих тачака $\mathbf{x}$ за које важи $\lim_{t\to+\infty}\phi^t(\mathbf{x}) = \mathbf{x}_*$.



Слика 3. Компетитивне врсте у случају коегзистенције: нулклинације и правци дуж њих и у областима $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$, $\mathcal{D}$.

Пример 161. (Коегзистирајуће врсте.) Нека је сада $r_1 = K_1 = \beta_1 = 1$, $r_2 = 3/4$, $K_2 = 3/4$ и $\beta_2 = 2/3$, тј. посматрајмо систем:

$$\begin{aligned} x'(t) &= (1 - x - y)\, x \\ y'(t) &= \frac{3}{4}\left(1 - \frac{4}{3}y - \frac{2}{3}x\right) y. \end{aligned}$$

Нулклинације система су праве $x = 0$, $y = 0$ које су и инваријантни скупови, као и праве $x + y = 1$ и $2x + 4y = 3$. Трајкторије система секу нулклинације као што је приказано на Слици 3. Еквилибријуми система су тачке

$$(1, 0), \quad \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right), \quad (0, 0), \quad \text{и} \quad \left(0, \frac{3}{4}\right).$$

Извод векторског поља

$$F(x, y) = (1 - x - y)\, x\mathbf{i} + \frac{3}{4}\left(1 - \frac{4}{3}y - \frac{2}{3}x\right) y\mathbf{j}$$

је

$$dF(x, y) = \begin{bmatrix} 1 - 2x - y & -x \\ -1/2y & 3/4 - 2y - 1/2x \end{bmatrix}.$$

Помоћу сопствених вредности линеаризације закључујемо да су тачке $(0, 0)$, $(1, 0)$ и $(0, 3/4)$ нестабилни еквилибријуми, док је $(1/2, 1/2)$ асимптотски стабилни еквилибријум.

Слика 3 приказује нулклинације (зелене праве), правца векторског поља дуж нулклинација (црвене стрелице) басене $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$ и $\mathcal{D}$ и усмереност трајекторија унутар њих (плаве стрелице). Сличним резоновањем као у Примеру 160, закључујемо да трајекторије не напуштају области $\mathcal{A}$ нити $\mathcal{C}$, као и да све трајекторије (осим једне која увире у еквилибријум $(1/2, 1/2)$) које почињу у $\mathcal{B}$ или $\mathcal{D}$ увиру у $\mathcal{A}$ или $\mathcal{C}$. Због чињенице да све трајекторије увиру у еквилибријуме (коју смо споменули у Примеру 160) и усмерености векторског поља у областима $\mathcal{A}$ и $\mathcal{C}$, закључујемо да све трајекторије увиру у асимптотски стабилни еквилибријум $(1/2, 1/2)$. ✓

Сви претходни модели су специјални случај шире класе система који се зове Колмогоревљев систем и облика је

$$x_j'(t) = x_j f_j(x_1, \ldots, x_n), \quad j = 1, \ldots, n,$$

где је n број врста, а функције f_j представљају стопу раста по глави становника. Шта можемо да кажемо (на основу облика Колмогоровљевог система) о трајекторији са почетним условом у хиперравни $x_j = 0$? Која је еколошка интерпретација ове чињенице? Шта можемо да кажемо о трајекторији са почетним условом у делу простора $\{x_j \geq 0 \mid j = 1, \dots n\}$? Која је еколошка интерпретација ове чињенице?